1 О чём листочек

В последнее время появилось много непростых задач на касание объектов (в первую очередь окружностей). Так что появился листик.

2 Упражнения

1. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке B_1, а серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке C_1. Докажите, что прямая B_1C_1 касается вписанной окружности треугольника ABC.
2. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На продолжении отрезков AC и BC за точку C отмечены точки D и K соответственно так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MCK, касаются.
3. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности (B_1HC_1) лежит на прямой BC. Докажите, что окружности (B_1HC_1) и (ABC) касаются.
4. В треугольнике ABC известно $\angle C = 60^\circ$. Биссектрисы углов A и B пересекают (ABC) в точках X и Y соответственно. Докажите, что XY касается вписанной окружности треугольника ABC.
5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено равенство $\angle DAB + 2\angle BCD = 180^\circ$. Вписанная окружность треугольника ABD касается сторон AB и AD в точках K и L соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников AKL и BCD касаются.

3 Задачи

1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E, а на стороне AD - точка F так, что описанная окружность треугольника ABE касается отрезка CF. Докажите, что описанная окружность треугольника CDF касается прямой AE.
2. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник с $\angle ABC > 90$, $CDA > 90$ и $\angle DAB = \angle BCD$. Обозначим через E и F симметричные A прямые BC и CD соответственно. Предположим, что отрезки AE и AF пересекают прямую BD в точках K и L

соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BEK и DFL касаются друг друга.

3. Точка Q симметрична вершине A относительно середины дуги BAC. Точка R — проекция вершины A на прямую IQ (I — центр вписанной окружности треугольника). Точка P такова, что $ABPC$ является параллелограммом. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PQR, касается прямой AI.

4. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Продолжение медианы, проведённой из вершины B, пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке D. Через центр окружности, описанной около треугольника BDL, проведена прямая l, параллельная прямой AC. Докажите, что окружность ω касается прямой l.